

Rezept: Rang bestimmen

Überführe gegebene Matrix  $A$  durch EZU in Matrix  $\tilde{A}$  in Zeilenstufenform. Dann ist

$$\text{Rang}(A) = \text{Anzahl der Pivotelemente von } \tilde{A}$$

Rezept: Matrix invertieren

Sei  $A \in M(n \times n; K)$  gegeben.

Überführe  $(A | E_n)$  durch

EZU in  $(\tilde{A} | B)$  so dass

$\tilde{A}$  in Zeilenstufenform.

Falls  $\tilde{A} = E_n$ :  $A$  invertierbar  
mit  $A^{-1} = B$ .

Falls  $\tilde{A} \neq E_n$ :  $A$  nicht invertierbar.

Rezept: LGS lösen

Schritt 1: Schreibe das LGS in Matrixform:  $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$

Schritt 2: Überführe  $(A, \underline{b})$  durch FZU in  $(\tilde{A}, \tilde{\underline{b}})$  so, dass  $\tilde{A}$  Zeilenstufenform hat:

alles Null

Betrachte Nullzeilen  $r+1, \dots, m$  von  $\tilde{A}$ .

Falls  $\begin{pmatrix} \tilde{b}_{r+1} \\ \vdots \\ \tilde{b}_m \end{pmatrix} \neq \underline{0}$ ,  $\text{Lös}(A, \underline{b}) = \emptyset$

FERTIG.

Schritt 3: Überführe  $(\tilde{A}, \tilde{b})$  durch  
weitere EZU zu  $(\tilde{\tilde{A}}, \tilde{\tilde{b}})$  in  
Zeilennormform.

oder

löse  $\tilde{\tilde{A}}_{\pm} = \tilde{\tilde{b}}$   
zu Fuß nach  $\pm$  auf

Schritt 4: Markiere Spalten von  $\tilde{\tilde{A}}$ ,  
in denen kein Pivot-  
Element auftaucht &  
ändere in diesen Spalten  
alle Vorzeichen.

Schritt 5: Lösche die Nullzeilen.

Schritt 6: Füge für jede markierte Spalte  $j$  eine Zeile der Form

$$(0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \ \color{magenta}{1} \ 0 \ 0 \ \dots \ \dots \ 0 \ 0 \ | \ 0)$$

↑  $j$ -te Stelle

so ein, dass die neuen  $1$ en zusammen mit den Pivot-Elementen eine vollständige Diagonale von  $\widetilde{A}$  bilden.

Schritt 7: Lösche die Spalten mit den Pivotelementen.

Für die verbleibende Matrix

$$(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_{n-r} \mid \underline{d})$$

gilt:  $\underline{d} \in \text{Lös}(A, \underline{b})$ , und  $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_{n-r}$  ist Basis von  $\text{Lös}(A)$ .

$$\begin{aligned} \text{Lös}(A, \underline{b}) &= \underline{d} + \text{Lös}(A) \\ &= \underline{d} + \text{span}(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_{n-r}) \end{aligned}$$